

MODERN (SEMBOİLİK) MANTIK

Modern mantık, mantık unsurlarını sembollerle ifade eden ve bu sembollerle işlemler yaparak sağlam çıkarımlara ulaşmayı amaçlayan bir disiplindir.

Klasik mantık gibi modern mantığın da amacı geçerli çıkarımlara ulaşmaktır. Geçerli çıkarımları geçersiz çıkarımlardan ayırt etme işlemi çıkarımların denetlenmesi ile olur. Denetleme, çıkarımların geçerliliğini belirleme işlemidir. Mantıksal geçerlilik içeriksel değil biçimsel doğruluktur. Modern mantık, günlük dildeki çıkarımları, matematik diline benzeyen, çok anlamlılığa ve belirsizliğe hiç yer vermeyen sembolik bir dile çevirip kesin bir denetlemeyi sağlar. Bu yeni mantık, klasik Aristoteles mantığının alanını aşmış ve onu geliştirip genişletmiştir. Modern mantıkta denetleme, neredeyse matematiğin ispatlarında görülen bir kesinlikle yapılabilmektedir. Modern mantığın klasik mantıktan en önemli farkı, tamamen sembolik olduğu için içeriğin etkisinden kurtulmuş olmasıdır. Buna rağmen klasik mantık günlük dili kullandığı için kısmen içeriğin etkisindedir.

Modern mantık günümüzde pek çok alanda uygulanmaktadır. Örneğin bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerde (bilgisayar devrelerinin programlanması), elektrik devrelerinin çözümlenmesinde ve matematiksel ispatlamalarda sembolik mantıktan yararlanılmaktadır. Günlük yaşamda ise sağlam akıl yürütmeler yapma, başkalarının düşünce biçimlerini analiz edip eleştirebilme, ana dili daha doğru kullanılabilme konularında sembolik mantık yol göstericidir. Modern mantık, günümüzün özellikle bilgi ve dil felsefesi dallarına da yeni açılımlar sağlamıştır.

Modern mantık, iki değerli mantık, çok değerli mantık, kiplik mantığı, özdeşlik mantığı ve varlık mantığı olmak üzere beşe ayrılır.

A. İKİ DEĞERLİ MANTIK

İki değerli mantıkta bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri vardır ve başka bir üçüncü olasılık kabul edilmez. İki değerli mantık önermeler ve nicelleme mantığı olmak üzere iki bölümde incelenir.

1. Önermeler Mantığı

Önermeler mantığı, birden fazla önerme ve bu önermeleri birleştiren eklemelerin sembolleştirilmesidir. Daha önce, bir yargı belirten ve doğru ya da yanlış olan cümlelere önerme dendiğini görmüştük. Önermeler basit ve bileşik önerme olmak üzere ikiye ayrılıyordu. Bileşik önermeler birden fazla basit önermenin "ve", "veya", "ise", "ancak", "ancak ve ancak" ve "değil" gibi eklerle birbirine bağlanır. Bunlara önerme eklemeleri denir.

Örnek:

"Ahmet avukat veya savcıdır."

Yukarıdaki önerme bir bileşik önermedir. Bu bileşik önerme "Ahmet avukattır." ve "Ahmet savcıdır." basit önermelerinin "veya" eklemiyle bağlanması sonucu oluşmuştur.

Önermeler mantığında basit önermeler p, q, r, s, t, v, z gibi önerme sembolleriyle gösterilir. Öyleyse bundan sonra "Özge sınıfını geçti." önermesi yerine "p" sembolünü (ya da bir başkasını) kullanabiliriz.

Önermelerin aldığı doğru ya da yanlış değere doğruluk değeri denir ve "D" ve "Y" harfleriyle gösterilir.

Örnek:

İstanbul Türkiye'nin en büyük kentidir. (D)
3 kere 3, 27 eder. (Y)

Önermeler mantığı, önerme eklemeleri ile oluşmuş önermeleri ve çıkarımları ele alır. Çıkarımın verilen öncüllerden sonuç olarak yeni bir önerme çıkarma işlemi olduğunu hatırlayacaksınız.

Sürekli kitap okuyan öğretmen başarılı olur.	öncül (p)
Osman sürekli kitap okur.	öncül (q)
O halde Osman başarılı öğretmen olur.	sonuç (r)

Birinci ve ikinci öncüller sonuç önermesine "o hâlde" sözcüğü ile bağlanmıştır. Bundan sonra "o hâlde", "öyleyse", "demek ki" gibi sözcükler ":" işaretliyle gösterilecektir.

Sembolik mantıkta "Abdullah gazetecidir." gibi bir önerme basit bir önermedir. Çünkü her hangi bir önerme eklemi almamıştır. Ancak, "Abdullah gazeteci değildir." gibi bir önerme bileşik önermedir. Çünkü "değil" sözcüğü bir önerme eklemidir. O hâlde sembolik mantıkta içinde önerme eklemi geçen herhangi bir önerme, bileşik önerme olarak ele alınacaktır.

Klasik mantıkta basit bir önerme bir ad, bir yüklem ve bir bağdan oluşur. Önermelerde birden fazla ad olabilir. Örneğin, "Felsefe ve bilim birbirini tamamlar." önermesinde "felsefe" ve "bilim" olmak üzere iki ad vardır. Bu nedenle bu önerme ikili yüklemli bir önermedir. Herhangi bir önermede yüklem sadece tek bir "ad"a yüklenirse birli yüklem, "iki ad"a yüklenirse ikili yüklem, "üç ad"a yüklenirse üçlü yüklem, "n sayıda ad"a yüklenirse n'li yüklem adı verilir.

Örnek:

Hegel filozoftur. Birli yüklem

$2 \geq 3$ İkili yüklem

Ali ile Ayşe kardeştir. ikili yüklem

Aydın, Denizli ile İzmir arasındadır. Üçlü yüklem

a. Önerme Eklemeleri ve Doğruluk Çizelgeleri

Önerme eklemeleri, basit önermeleri bileşik hâle getiren mantık değişmezleridir. Bu eklemeler "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" ve "değil" sözcükleriyle ifade edilir.

Önerme eklemelerinin birinci işlevi bileşik önermeler oluşturmak; ikinci işlevi önermelerin tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliliğinin ve çıkarımların geçerliliğinin denetlenmesini sağlamaktır.

Önerme eklemelerinin sembolik mantıkta kullanılış biçimleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Önerme Eklemi	Sembolü	Kullanımı	Kullanımı
Değilleme eklemi	~	"değil"	~ p
Tümel evetleme eklemi	∧	"ve, ne..ne de, hem..hem de"	p ∧ q
Tikel evetleme eklemi	∨	"veya, ya da"	p ∨ q
Koşul eklemi	⇒	"ise"	p ⇒ q
Karşılıklı koşul eklemi	⇔	"ancak ve ancak"	p ⇔ q

Bir bileşik önermede birden fazla önerme eklemi bulunabilir. Örneğin, "Üretim artarsa fiyatlar azalır ve enflasyon düşer." önermesinde "ise" ve "ve" olmak üzere iki önerme eklemi vardır.

Bileşik önermelerde, bileşikliği oluşturan yargılara bileşen adı verilir. Bir bileşik önermede önce gelen bileşene ön bileşen, sonra gelen bileşene art bileşen adı verilir.

"Yağmur yağarsa ürün bol olur." önermesinde "Yağmur yağar." önermesi ön bileşen, "ürün bol olur." önermesi art bileşendir.

Bir bileşik önermede, önermenin tümünü etkileyen eklem ana eklem, birbirine bağlanan önermelere ise ana bileşenler denir. Aşağıdaki örnekler ana eklem ve ana bileşenleri göstermektedir.

~p	~		p
	ana eklem		ana bileşen
p ∧ q	p	∧	q
	ana bileşen	ana eklem	ana bileşen
~p ∨ q	~p	∨	q
	ana bileşen	ana eklem	ana bileşen
~ (p ∨ q)	~		p ∨ q
	ana eklem		ana bileşen
[(p ∧ q) ⇒ p] ⇔ r	[(p ∧ q) ⇒ p]	⇔	r
	ana bileşen	ana eklem	ana bileşen
~ [(p ∨ q) ⇔ (p ∧ q)]	~		[(p ∨ q) ⇔ (p ∧ q)]
	ana eklem		ana bileşen
[~(p ∨ ~q) ⇒ (p ∨ q)]	~(p ∨ ~q)	⇒	(p ∨ q)
	ana bileşen	ana eklem	ana bileşen

Bileşik önermeler ana eklemelerine göre tanımlanır. Aşağıdaki çizelge bu tanımlamaları göstermektedir.

Bileşik Önerme	Tanımlama
~ p	Değilleme önermesi
p ∨ q	Tümel evetleme önermesi
p ∧ q	Tikel evetleme önermesi
p ⇒ q	Koşul önermesi
P ⇔ q	Karşılıklı koşul önermesi

Bileşik önermelerin doğruluk değeri doğruluk tablosu ile denetlenir. Sembolik mantıkta önermeleri doğrudan ifade etmeyip semboller kullandığımız için, bir önermenin doğru ya da yanlış olup olmadığını bilemeyiz. Bu nedenle, bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri vardır. Doğru değer "D" ile, yanlış değer "Y" ile gösterilir.

Şimdi, kullandığımız önerme eklemelerinin doğruluk tablosunda aldıkları değerleri görebiliriz.

Değilleme Eklemi

Olumlu bir ifadeyi olumsuz, olumsuz bir ifadeyi olumlu yapan deyimlere değilleme denir. Değilleme eklemi "~" sembolü ile gösterilir. Örneğin, "İnsan özgürdür." (p) önermesinin değillesmesi "İnsan özgür değildir." (~p) önermesi olur. Bir önerme doğru ise değillesmesi yanlış, bir önerme yanlış ise değillesmesi doğru olur.

p	~p
D	Y
Y	D

Değillenen önerme tekrar değillendiğinde ilk önermenin doğruluk değerini alır ve buna çifte değilleme kuralı denir.

p	~p	~~p
D	Y	D
Y	D	Y

Tümel Evetleme Eklemi (∧)

Günlük dilde konuşurken "ve", "hem...hem de", "da...da" gibi sözcüklerle ifade ettiğimiz eklemidir. Kısaca, iki basit önermenin "ve" (∧) eklemiyle birleştirilmesinden oluşmuş bileşik önermeye tümel evetleme önermesi adı verilir.

Tümel evetleme önermesinde bileşik önermenin doğruluğu, bu bileşik önermeyi oluşturan bütün bileşenlerin aynı anda doğru olmasına bağlıdır.

Tümel evetleme eklemine çözümleme kuralı aşağıdaki gibi olur.

p	q	p ∧ q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Tek bir önermenin (p) alacağı doğruluk değeri doğru ya da yanlış olmak üzere iki tanedir. Ancak, iki önermenin (p ve q gibi) bir arada alabilecekleri doğruluk değerlerini bir arada düşünürsek dört olasılık ortaya çıkar: ikisi de doğru, birincisi doğru ikincisi yanlış, birincisi yanlış ikincisi doğru ve her ikisi de yanlış. Eğer üç önermenin bir arada doğruluk değerine bakılırsa o zaman da sekiz farklı değer ortaya çıkar. Yukarıdaki tabloda iki önerme olduğu için dört farklı değer ortaya çıkmıştır.

Tikel Evetleme Eklemi (V)

Günlük dilde "veya", "ya da", "ya...ya" gibi sözcüklerle ifade ettiğimiz eklemidir. Kısaca, iki basit önermenin "veya" (V) eklemiyle birleştirilmesinden oluşmuş bileşik önermeye tikel evetleme önermesi adı verilir. Tikel evetleme eklemi doğru olması için bileşenlerinden birinin doğru olması gerekli ve yeterlidir.

p	q	p V q
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örneğin, "İnsanlar iyi yaşamayı veya uzun yaşamayı hak eder." önermesinin doğru değer alması için, "İnsanlar iyi yaşamayı hak eder." ya da "İnsanlar uzun yaşamayı hak eder." önermelerinden bir tanesinin doğru değer alması gereklidir. Çünkü aradaki eklem "veya" olduğuna göre, sadece bir tanesinin evetlenmiş olması yeterlidir. Bundan dolayı önermelerden en az birinin evetlenmesi anlamında "tikel evetleme" diyoruz.

SORU: $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ önermesinde, p önermesi "doğru", q önermesi "yanlış" ise, bu önermenin sonucu nedir? p önermesinin yerine "D", q önermesinin yerine "Y" koyarak bulunuz.

Koşul eklemi (\Rightarrow)

Günlük dilde "ise", "se", "sa", "ancak" gibi sözcüklerle ifade edilen eklemidir. İki basit önerme "ise" eklemiyle birleştirilmişse buna koşul önermesi adı verilir. Koşul önermesinde ön bileşen doğru, art bileşen yanlış değer almışsa bileşik önerme yanlış değer alır. Diğer durumlarda önerme doğru değer alır.

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Örneğin, "Dürüst davranırsan insanlar seni sever." önermesinde

$$p \Rightarrow q$$

birinci önerme (p) doğru fakat ikinci önerme (q) yanlışsa koşul yerine gelmemiş demektir. Yani dürüst davranmış olmasına rağmen insanların onu sevdiği doğru değildir. Bu durumda, önermenin bütünü yanlış değer alır.

Karşılıklı Koşul Eklemi (\Leftrightarrow)

Günlük dilde "ancak ve ancak ise" sözcükleriyle ifade edilir. İki basit önerme "ancak ve ancakise" ile birleştirilmişse, ortaya çıkan bileşik önermeye karşılıklı koşul önermesi adı verilir. Bu önerme türünde, bileşenlerin hepsi de aynı değeri almışsa önerme doğru, diğer hâllerde yanlıştır. Dolayısıyla, karşılıklı koşul eklemi doğru olabilmesi için, bileşenlerden ikisi de doğru ya da ikisi de yanlış olmalıdır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Örneğin, "Namık ancak ve ancak avukat olursa başarılı olur." önermesinde Namık'ın avukat olmadığı takdirde başarılı olamayacağı anlaşılmaktadır. Bu önermenin doğru olması, Namık'ın avukat olup başarılı olmasına ya da Namık'ın avukat olmayıp başarılı olamamasına bağlıdır.

SORU: "p" önermesi doğru, q önermesi yanlış olarak düşünülüğünde, $\sim[(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)]$ bileşik önermesinin alacağı değer ne olur?

Bir doğruluk tablosunda yukarıdan aşağı doğru sıralamaya sütun, soldan sağa doğru sıralamaya satır adı verilir.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	Y	Y	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	D	D	Y
Y	Y	D	D	Y	Y	D	D

Yukarıda gördüğümüz eklemelerin kuralları yardımıyla, herhangi bir bileşik önermenin doğruluk değerini bulabiliriz. Bütün işlemleri eklemelerin kurallarına göre yapacağımız için bu kuralları sürekli aklımızda tutmamız gerekecek.

Örnek 1: p:Y, q:D değer aldığı anda $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ önermesinin doğruluk değerini bulalım. Yapılacak ilk şey, verilen değerleri önermede yerine koymak ve önerme eklemelerinin kurallarına göre işlemi tamamlamaktır.

$$(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$$

$$(Y \wedge D) \vee (Y \Rightarrow D)$$

$$Y \vee D$$

$Y \vee D = D$ değer alır.

SORU: p ve q önermelerine farklı değerler vererek $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$ önermesinin alacağı değerleri bulunuz.

b. Mantık Değişmezleri, Tutarlılık, Geçerlilik, Denklik (Eş Değerlik)

Sembolik mantık, günlük dilde kullandığımız önerme ve çıkarımları sembolik dile dönüştürür. Bunu yaparken de değişmezlerden yararlanır.

Kendi içinde anlamlı olan ve daha küçük anlamlı birimlere ayrılamayan deyimlere değişmez denir.

Değişmezler, mantık değişmezi ve özel değişmezler olmak üzere ikiye ayrılır.

Değişmezler

(1) Mantık Değişmezleri

- (a) Önerme Eklemleri: "değil, ve, veya, ise, ancak ve ancak"
(b) Niceleyiciler: "her, bazı, tüm, hiçbir, birkaç, ki-mi"
(c) Kiplik, Özdeşlik, Varlık Mantığı Değişmezleri: "zorunlu, mümkün, özdeş"

(2) Özel Değişmezler

- (a) Ad değişmezleri
(b) Yükleme değişmezleri

Mantıksal değişkenler: x, y, z gibi bilinmeyen ve değişik değerlere sahip olabilen sembollerdir. Değişmezler ve değişkenlerin birlikte oluşturduğu sözcük dizilerine deyim adı verilir.

Sembolleştirme: Önerme sembolleri ve mantık değişmezleriyle, günlük dildeki önermelerin ve çıkarımların sembolik dile çevrilmesidir. Tek bir basit önerme p, q, r, s, t, v gibi küçük harflerle sembolleştirilir. Bileşik önermelerde ise önce ana eklem bulunur ve bileşenler paranteze alınarak sembollerle gösterilir.

Basit ve bileşik önermelerin sembolleştirilmesi:

Örnek 1: "Yağmur yağıyor." Önermesi, tek bir yargı içeren basit bir önerme olduğu için "p" harfi ile sembolleştirilir.

Örnek 2: "Yağmur yağar ise ürün bol olur."
P ⇒ q

önermesi ana eklemi "ise" olan bir bileşik önermedir. "Yağmur yağar." önermesi "p", "ürün bol olur." önermesi "q" ile sembolleştirilirse, önermenin bütünü "p ⇒ q" biçiminde sembolleştirilir.

Örnek 3: "Yağmur yağar ve ürün bol olursa insanlar mutlu olur."
p ∧ q ⇒ r

önermesi üç bileşenli bir bileşik önermedir. Bu önermede insanların mutlu olması yağmur yağmasına ve ürünün bol olmasına bağlanmıştır. Bu durumda ana eklem koşul eklemidir. Bu durumda bu önerme (p ∧ q) ⇒ r biçiminde sembolleştirilir.

Sadece önermeler değil, çıkarımlar da aynı yöntemle sembolleştirilebilir. Hatırlayacağınız gibi, bir çıkarım en az iki öncülden ve bir sonuç önermesinden oluşur. Öncül önermeler ayrı ayrı sembolleştirilir ve sonuç önermesine "o hâlde" anlamına gelen "∴" sembolü ile bağlanır.

Örnek 1:

Tüm insanları sevmek gerekir.

Zenciler insandır.

O hâlde, zencileri sevmek gerekir.

Yukarıdaki çıkarımda, "Tüm insanları sevmek gerekir." önermesini "p" ile "Zenciler insandır." önermesini "q" ile, "Zencileri sevmek gerekir." önermesini "r" ile sembolleştirirsek, p, q ∴ r çıkarımını elde ederiz.

Örnek 2:

Bir sporcu zeki ve çevik ise başarılı olur.

Seren zeki ve çeviktir.

O hâlde, Seren başarılı olur.

Yukarıdaki çıkarımı sembolleştirmek için önce birinci öncülden başlayarak adım adım gidelim.

Birinci öncül: Bir sporcu zeki ve çevik ise başarılı olur.

$$p \wedge q \Rightarrow r$$

İkinci öncül: Seren zeki ve çeviktir.

$$p \wedge q$$

Sonuç : O hâlde, Seren başarılı olur.

$$\therefore r$$

Görüldüğü gibi, yukarıdaki çıkarımın sonuç olarak sembolleştirilmiş biçimi (p ∧ q) ⇒ r, (p ∧ q) ∴ r biçiminde olur.

Yorumlama: Sembolik dile çevrilmiş çıkarımların ve bu çıkarımları oluşturan önermelerin geçerliliklerini denetleyebilmek için yorumlama gereklidir.

Sembolleştirilmiş önermelere doğru ya da yanlış bir doğruluk değeri verilmesine yorumlama denir.

"p" gibi tek bir basit önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki, "p" ve "q" önermelerinden oluşmuş bir bileşik önermenin dört, "p", "q" ve "r" gibi üç önermeden oluşmuş bir bileşik önermenin sekiz yorumlaması olur. Satır sayısı 2ⁿ formülüyle bulunur. Burada "n" bileşen sayısını gösterir.

Önermelerin alabilecekleri yorumlar aşağıdaki gibidir.

p	q	r
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

Önermelerin doğruluk değerlerinin verilerek yorumlanmasının yapıldığı çizelgelere yorumlama çizelgesi ya da doğruluk çizelgesi (tablosu) adı verilir. Bu bilgiler ışığında, herhangi bir önermenin nasıl yorumlandığını şu şekilde gösterebiliriz.

p ⇒ (q ∧ p) önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibi olur.

p	q	q ∧ p	p ⇒ (q ∧ p)
D	D	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	Y	D
Y	Y	Y	D

İlk önce p ve q önermelerinin alabilecekleri doğruluk değerleri yazılır. Önermenin bileşenlerinin tek tek değerleri bulunduktan sonra, en sonunda önermenin bütününe doğruluk değerleri çıkarılır. Bu yöntem ile, önermelerin tutarlılık, geçerlilik ve eş değerliklerini denetlememiz olanaklı olur.

Önermenin Tutarlılığının Denetlenmesi

Bir önermenin tutarlılığı demek, o önermenin bütün yorumlamalarından en az birinin doğru değeri almış olması demektir. Bir önermenin tüm yorumlamaları doğruysa buna tautoloji denir. Bir önermenin doğruluk tablosunda almış olduğu değerlerin tümü yanlışsa o önerme tutarsız demektir. Önermenin tutarlı olması demek ise, o önermenin içinde çelişik ifadelerin olmadığı anlamına gelir.

p	p	p
D	D	D
	Y	D

tutarlı

p	p
Y	Y

tutarsız

Örnek 1: $(p \vee q) \wedge p$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p$
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	Y
Y	Y	Y	Y

Tutarlı

Örnek 2: $(p \wedge \sim p) \wedge q$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim.

p	Q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p) \wedge q$
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	Y

Tutarsız

Örnek 3: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y
D	Y	D	Y	D	Y
D	Y	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D

SORU: $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ önermesinin tutarlılığını doğruluk tablosuyla denetleyiniz.

Birden Fazla Önermenin Tutarlılığının Denetlenmesi

İki ya da daha fazla önermenin bir arada tutarlı olup olmadıklarını denetlemek için, bunların ayrı ayrı doğruluk değerleri bulunur ve birbirleriyle karşılaştırılır.

Eğer bu önermeler aynı satırda en az bir defa doğru değeri almışsa bu önermeler tutarlıdır.

Örnek 1: $p \vee q, p \Rightarrow q, \sim p \Leftrightarrow q$ önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadıklarını denetleyelim

p	Q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
D	D	Y	D	D	Y
D	Y	Y	D	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	Y	D	Y

Önermeler bir arada tutarlıdır.

Örnek 2: $p \Rightarrow q, p \wedge \sim q$ önermelerinin tutarlı olup olmadığını denetleyelim.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
D	D	Y	D	Y
D	Y	D	Y	D
Y	D	Y	D	Y
Y	Y	D	D	Y

Önermeler bir arada tutarsız.

SORU 1: $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p$ ve $p \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ önermelerinin tutarlılığını doğruluk tablosu yaparak denetleyiniz.

SORU 2: $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim q, (\sim p \vee q) \Rightarrow p$ ve $(p \wedge q)$ önermelerinin tutarlılığını doğruluk tablosu yaparak denetleyiniz.

Önermenin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Tüm yorumlamaları doğru olan önermeye geçerli önerme denir. Yorumlamalardan en az birisi yanlış değer almışsa bu önerme geçersizdir.

p	p
D	D
	D

geçerli

p	P	p
D	Y	Y
Y	Y	Y

geçersiz

Örnek 1: $(p \vee q) \vee (p \Rightarrow q)$ önermesinin geçerli olup olmadığını doğruluk tablosu ile denetleyelim:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee q) \vee (p \Rightarrow q)$
D	D	D	D	D
D	Y	D	Y	D
Y	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D

Geçerli

Yukarıdaki önermenin tüm yorumlamaları doğru olduğundan önerme geçerlidir.

Örnek 2: $(p \vee q) \wedge p$ önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyelim:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p$
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	Y
Y	Y	Y	Y

Geçersiz

Yukarıdaki önermenin üçüncü ve dördüncü satırlardaki iki yorumu yanlış olduğundan bu önerme geçersizdir.

NOT: Her tutarsız önerme aynı zamanda geçersizdir. Ancak, her tutarlı önermenin geçerli olacağını söyleyemeyiz. Geçerli de olabilir, geçersiz de olabilir.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Çıkarımların geçerliliği iki yolla denetlenebilir.

Birinci yol: Çıkarımın iki öncülü tümel evetleme eklemiyle (\wedge) birbirine bağlanır. Elde edilen tümel evetleme önermesi koşul eklemiyle (\Rightarrow) sonuç önermesine bağlanır. Elde edilen koşul önermesinin doğruluk tablosuyla geçerli olup olmadığı denetlenir. Koşul önermesi geçerliyse çıkarım da geçerli demektir.

Örnek 1: $p \vee q, \sim q \therefore p$ çıkarımının geçerli olup olmadığını denetleyelim. Önce, öncülleri tümel evetleme eklemiyle birbirine bağlayalım. Böylece, $(p \vee q) \wedge \sim q$ önermesini elde ederiz. Bu önermeyi koşul eklemiyle sonuç önermesine bağladığımızda $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$ önermesini elde ederiz. Şimdi bu önermenin geçerliliğini denetleyebiliriz:

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
D	D	Y	D	Y	D
D	Y	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	D
Y	Y	D	Y	Y	D

geçerli

Tüm değerleri doğru çıktığına göre bu önerme geçerli, dolayısıyla çıkarım geçerlidir.

Örnek 2: $\sim p \wedge \sim q, p \leftrightarrow q \therefore p$

İkinci yol: Öncüller aynen alınıp, sonuç önermesinin değillesmesi alınarak önermelerin tutarlı olup olmadığına bakılır.

Örnek 1: $p \Rightarrow q, p \therefore q$ çıkarımının geçerli olup olmadığını denetleyelim. Bunun için, "o hâlde" (\Rightarrow) işaretini atıp sonuç önermesinin değilini alırız. Böylece üç farklı önerme ortaya çıkar: $p \Rightarrow q, p, \sim q$. Şimdi, bu üç önermenin bir arada tutarlı olup olmadığına bakalım.

P	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$
D	D	Y	D
D	Y	D	Y
Y	D	Y	D
Y	Y	D	D

Tutarsız
Çıkarım
Geçerli

Yukarıdaki üç önermenin aynı satırda beraberce aldıkları doğru değeri olmadığı için bu önermeler tutarsızdır. Ancak çıkarım geçerlidir.

Sonucu değilllenmiş bir çıkarımın önermeleri tutarlı ise çıkarımın kendisi geçersiz, sonucu değilllenmiş bir çıkarımın önermeleri tutarsız ise çıkarımın kendisi geçerlidir.

Örnek 2: $p \Rightarrow q, \sim p \vee q \therefore q$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim

- $p \vee \sim q, p \Rightarrow q \therefore p \wedge \sim q$
- $\sim(p \leftrightarrow q), \sim p \therefore \sim q$ çıkarımlarının geçerliliğini birinci ve ikinci yolları kullanarak denetleyiniz.

Önermelerin Denkleğinin (Eş Değerliği) Denetlenmesi

İki önermenin birbirine denk (eş değer) olması, aynı satırda aynı doğruluk değerlerini almış olmalarını gerektirir.

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
D	D	D	D	Y	Y	D	D	D	Y
D	D	Y	Y	Y	Y	Y	D	D	Y

denk denk değil

İki önermenin denk olup olmadığını anlamak için iki değişik yol kullanılabilir.

Birinci yol: Önermeler doğruluk tablosuyla ayrı ayrı denetlenir ve doğruluk değerleri birbiriyle karşılaştırılır. Aynı değerleri almışlarsa önermeler denktir.

Örnek 1: $\sim p \Rightarrow q, p \vee q$ önermelerinin denkleğini denetleyelim.

p	q	~p	~p ⇒ q	p ∨ q
D	D	Y	D	D
D	Y	D	D	D
Y	D	Y	D	D
Y	Y	D	Y	Y

Önermeler denktir.

Bu iki önerme doğruluk tablosunun bütün satırlarında aynı değeri aldıkları için denktir.

Örnek 2: $p \Leftrightarrow q, \sim p \vee \sim q$ önermelerinin denliğini denetleyelim:

p	q	~p	~q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \vee \sim q$
D	D	Y	Y	D	Y
D	Y	Y	D	Y	D
Y	D	D	Y	Y	D
Y	Y	D	D	D	D

Önermeler denk değil.

Önermeler aynı satırlarda aynı değerleri almadıkları için denk değildir.

İkinci yol: Denklığı denetlemenin ikinci yolu, verilen iki önermeyi karşılıklı koşul (\Leftrightarrow) eklemiyle birbirine bağlamaktır. Elde edilen önermenin geçerliliği denetlenir. Eğer geçerliyse bu önermeyi oluşturan iki önerme birbirine denktir. Şimdi, yukarıdaki örnekleri ikinci yolla denetlemesini yapalım.

Örnek 1: $\sim p \Rightarrow q, p \vee q$ önermelerinin denliğini denetleyelim:

$(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ (karşılıklı koşul önermesi)

p	q	~p	~p ⇒ q	p ∨ q	$(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
D	D	Y	D	D	D
D	Y	D	D	D	D
Y	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	Y	Y	D

Önermeler denktir.

Örnekteki karşılıklı koşul önermesi geçerli olduğuna göre, iki önerme birbirine denktir.

Örnek 2: $p \Leftrightarrow q, \sim p \vee \sim q$ önermelerinin denliğini denetleyelim.

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (karşılıklı koşul önermesi)

p	q	~p	~q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
D	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y	D	Y
Y	Y	D	D	D	D	D

Önermeler denk değildir.

Yukarıdaki karşılıklı koşul önermesi geçersiz oldu-

ğundan iki önerme birbirine denk değildir.

Bir karşılıklı koşul önermesi geçerli ise bu önermeyi oluşturan iki önerme birbirine denktir.

1. $\sim(p \vee \sim q), \sim p \wedge q$
2. $\sim(p \wedge \sim q), p \Leftrightarrow q$ önermelerinin denliğini birinci ve ikinci yolu kullanarak denetleyiniz.

c. Çözümleyici Çizelge

Doğruluk tablosunda denetleme yapılırken, önermelerin sayısı arttıkça işlem yapmak zorlaşır. Daha önce belirttiğimiz gibi, tek bir önermenin doğru ve yanlış olmak üzere iki, iki önermenin dört, üç önermenin sekiz, dört önermenin on altı farklı değeri vardır. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için çözümleyici çizelge kullanılır.

Çözümleyici çizelge, bir ya da birden fazla önermenin doğrulayıcı ve yanlışlayıcı yorumlarını bir çizelge üzerinde belirtmeye yarar. Önermeler adım adını bileşenlerine ayrılır.

Çözümleyici çizelgenin bir takım temel kuralları vardır.

Çözümleme Kuralları

Çözümleyici çizelgede denetleme yapılırken, bütün önermeler tümel evetleme ve tikel evetlemenin kuralına indirgenerek çözümlenir.

Tümel Evetleme Önermesinin Çözümleme Kuralı

$p \wedge q$ gibi bir tümel evetleme önermesi çözümlenirken doğruluk tablosunda kullanılan kurallardan yararlanır. Bu önermenin doğru olabilmesi için p ve q önermelerinin doğru olması gerektiğini daha önce görmüştük. Çözümleyici çizelgede her iki önermenin de doğru olduğunu belirtmek için alt alta yazılarak çözümlenmesi yapılır. Yanına çözümleme sırasını belirtmek için numara verilir. Aynı numara, geldiği önermenin önüne kaynak numarası olarak yazılır. Bura-daki çengel işareti (]) "ve" eklemesini sembolize eder.

1. $p \wedge q$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right]^{(1)}$ Tümel Evetleme Önermesinin Çözümleme Kuralı

Örnek:

1. $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
2. $(p \wedge q)$
3. $(q \wedge p)$

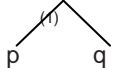
$\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right] 2$
 $\left. \begin{array}{l} q \\ p \end{array} \right] 3$

Tikel Evetleme Önermesinin Çözümleme Kuralı

$p \vee q$ gibi bir tikel evetleme önermesinin doğru olabilmesi p ya da q önermelerinden en az birinin doğru olması ile mümkündür. Dolayısıyla, tikel evetleme önermesinin doğru değer alması için ya p 'nin ya da q 'nin doğru olması gerekir. Bu durumu göstermek için çatal açma kuralı uygulanır.

Çatal açma kuralında birinci bileşen çatalın sol tarafına, ikinci bileşen çatalın sağ tarafına yazılır. Çözümlemeye başlarken çözümlenecek önermenin başına adım numarası yazılır. Aynı numara çatalın ortasına kaynak numarası olarak yazılır.

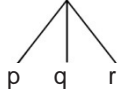
1. $p \vee q$



Tikel evetleme önermesinin çözümlenme kuralı.

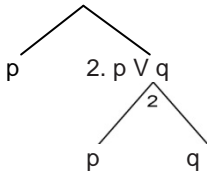
Üç ana bileşeni olan tikel önermenin çözümlenmesi şöyledir:

1. $p \vee q \vee r$



Örnek :

1. $p \vee (p \vee q)$



Türetilmiş Çözümleme Kuralları

Tümel evetleme ve tikel evetleme biçiminde olmayan önermeler için türetilmiş çözümleme kuralları uygulanır. Bu önermeler önce kendisine denk olan tümel evetlemeye ya da tikel evetlemeye dönüştürülür. Çözümleme, yukarıda gördüğümüz tümel evetleme ve tikel evetlemenin kurallarına göre yapılır. Aşağıdaki tabloda, De Morgan Kuralları adı verilen başlıca denklikler (eş değerlikler) verilmiştir.

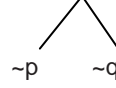
Önerme	Eş değeri
$\sim(p \wedge q)$	$\equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q)$	$\equiv \sim p \wedge \sim q$
$p \Rightarrow q$	$\equiv \sim p \vee q$
$\sim(p \Rightarrow q)$	$\equiv p \wedge \sim q$
$p \Leftrightarrow q$	$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Tümel Evetleme Değillemesinin Çözümleme Kuralı

$p \wedge q$ önermesini yanlış yapan durum, aynı önermenin değillemesini doğru yapan durumdur. Değillenmiş tümel evetleme önermesini yanlış yapan iki seçenek

olduğundan çatal açma kuralı uygulanır.

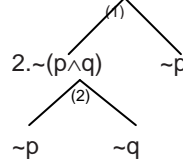
1. $\sim(p \wedge q)$



$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ denkliğinden Türetilmiş tümel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. $\sim[(p \wedge q) \wedge p]$

1. $\sim[(p \wedge q) \wedge p]$



Tikel Evetleme Değillemesinin Çözümleme Kuralı

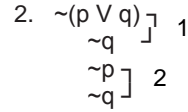
$p \vee q$ önermesini yanlış yapan durum, her iki bileşenin de yanlış olduğu durumdur. Dolayısıyla, $\sim(p \vee q)$ önermesinin doğru değer alması $\sim p$ ve $\sim q$ önermelerinin doğru olmasına bağlıdır. Bu nedenle alt alta yazma kuralı uygulanır.

1. $\sim(p \vee q)$



$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ denkliğinden türetilmiş tikel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı.

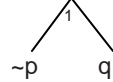
Örnek: 1. $\sim[(p \vee q) \vee q]$



Koşul Önermesinin Çözümleme Kuralı

Koşul önermesini yanlış yapan tek bir durum vardır. (ön bileşen doğru, art bileşen yanlışsa koşul önermesi yanlış, diğer durumlarda doğru). Bu durumda koşul önermesini doğru yapan iki seçenek vardır. Ya ön bileşen yanlış olmalı ya da art bileşen doğru olmalıdır. Dolayısıyla, ön bileşen yanlışsa koşul önermesi mutlaka doğru, art bileşen doğruysa koşul önermesi yine mutlaka doğrudur. Bu nedenle koşul önermesinde çatal açma kuralı uygulanır.

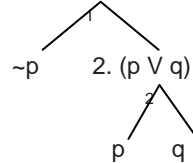
1. $p \Rightarrow q$



$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ denkliğinden türetilmiş koşul önermesinin çözümleme kuralı.

Örnek: $p \Rightarrow (p \vee q)$ önermesini çözümleniz.

1. $p \Rightarrow (p \vee q)$



Koşullu Değillemesinin Çözümleme Kuralı

$\sim(p \Rightarrow q)$ önermesinin doğru olması $p \Rightarrow q$ önermesinin yanlış olmasına bağlıdır. $p \Rightarrow q$ önermesini yanlış yapan tek bir durum olduğuna göre (p doğru, q yanlış ise yanlış), bu durum koşul önermesinin değillemesini doğru yapan durumdur. Koşul önermesinin değillemesini doğru yapan tek bir durum olduğuna göre, alt alta yazma kuralı uygulanır.

1. $\sim(p \Rightarrow q)$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ \sim q \end{array} \right\} 1$ $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$ eşdeğerliğinden türetilmiş, koşullu değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: $\sim[p \Rightarrow (p \vee q)]$ önermesini çözümleyiniz.

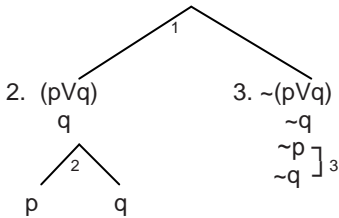
1. $\sim[p \Rightarrow (p \vee q)]$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ \sim(p \vee q) \end{array} \right\} 1$
 $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ \sim q \end{array} \right\} 2$

Karşılıklı Koşul Önermesinin Çözümleme Kuralı

Karşılıklı koşul önermesinin doğru olması için her iki bileşenin de aynı değeri almış olması gerekir. Bu durumda iki seçenekle karşı karşıya kalmış oluyoruz. Bu nedenle çatal açma kuralı uygulanmalıdır.

1. $(p \Leftrightarrow q)$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} 1$ $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ \sim q \end{array} \right\} 1$ $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ eşdeğerliğinden türetilmiş, karşılıklı koşul önermesinin çözümleme kuralı

Örnek: 1. $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

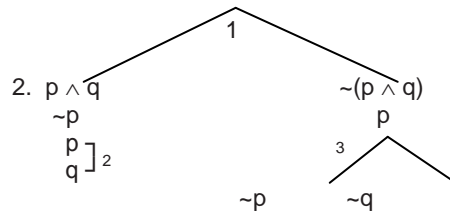


Karşılıklı Koşul Değillemesinin Çözümleme Kuralı

Karşılıklı koşul önermesini yanlış yapan durum (bileşenlerin farklı değer alması), karşılıklı koşul önermesini doğru yapar. Yani, $p=D$ ve $q=Y$ ya da $p=Y$ ve $q=D$ ise karşılıklı koşul değillemesi doğru olur. İki seçenek olduğuna göre çatal açma kuralının uygulanması gerekir.

1. $\sim(p \Leftrightarrow q)$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ \sim q \end{array} \right\} 1$ $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ q \end{array} \right\} 1$ $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ denkleğinden türetilmiş karşılıklı koşul değillemesinin çözümleme kuralı.

Örnek: 1. $\sim[(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$



SORU: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \wedge \sim p)$ önermesini çözümleyici çizelge ile çözümleyiniz.

Çözümleyici Çizelge Kuralları Alt Alta Yazma Kuralları

1. Tümel evetlemenin çözümleme kuralı.

1. $p \wedge q$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} (1)$

2. Tikel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \vee q)$
 $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ \sim q \end{array} \right\} (1)$

3. Koşullu değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \Rightarrow q)$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ \sim q \end{array} \right\} (1)$

Çatal Açma Kuralları

1. Tikel evetlemenin çözümleme kuralı

1. $p \vee q$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} (1)$

2. Tümel evetleme değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \wedge q)$
 $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ \sim q \end{array} \right\} (1)$

3. Koşul önermesinin çözümleme kuralı

1. $p \Rightarrow q$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} (1)$

4. Karşılıklı koşullunun çözümleme kuralı

1. $p \Leftrightarrow q$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} (1)$ $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ \sim q \end{array} \right\} (1)$

5. Karşılıklı koşullu değillemesinin çözümleme kuralı

1. $\sim(p \Leftrightarrow q)$
 $\left. \begin{array}{l} p \\ \sim q \end{array} \right\} (1)$ $\left. \begin{array}{l} \sim p \\ q \end{array} \right\} (1)$

Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Çözümleyici çizelge ile önermeler denetlenirken yapılması gereken işlem sırasını şöyle gösterebiliriz:

1. Çözümleme önermesinin ana eklemi ve ana bileşenleri belirlenir.

2. Çözümleme kuralları uygulanmaya başlandığında önce alt alta yazma kuralı, sonra çatal açma kuralı uygulanır.

3. Aynı çözümleme kuralı ile çözümlenecek önerme varsa, çözümlemeye en üsttekinden başlanır.

4. Çatal açma kuralından sonra işlem devam ediyorsa çatalın sol tarafındaki önermeden devam edilir.

5. Alt alta yazılan önermeler dizisine yol denir. Çatal açma kuralı uygulandığında iki farklı yol ortaya çıkar.

6. Her çözümlemeden sonra, yol üzerinde birbiriyle çelişen önerme olup olmadığına bakılır. Çelişki, aynı yol üzerinde bir önermenin hem kendisinin hem de değilinin bulunması durumudur. Örneğin, p ve $\sim p$ önermesi birbiriyle çelişiktir. Aynı yol üzerinde böyle bir çelişik önerme varsa o yol kapatılır ve "X" işareti konur. Kapatılan yol üzerinde çözümlemesi yapılmamış önerme olsa bile artık işlem yapılamaz. Açık olan yollardan işleme devam edilir.

7. Çözümlenen önermelere sıraya göre adım numarası verilir. Aynı numara çözümlenmiş önermeye kaynak numarası olarak yazılır. Basit önermeler (p, q, $\sim p$, $\sim q$ vb.) çözümleme gerektirmez. Bu nedenle, sadece çelişki ararken bakılır.

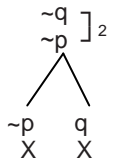
Aşağıdaki örnek, bu işlem akışını göstermektedir.

Örnek: $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ önermesini çözümlerim:

$$1. (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \quad (\text{Ö})$$

$$3. (p \Rightarrow q) \quad \neg^1$$

$$2. (\sim p \wedge \sim q) \quad \neg^1$$



Örnekteki önermenin ana eklemi tümel evetleme olduğu için önce alt alta yazma kuralı uygulandı. Her çözümleme basamağına çözümleme sırasına göre adım numarası ve kaynak numaraları yazıldı. Çözümleme sonunda $\sim q$ ile q önermesi aynı yol üzerinde olduğu için birbirleriyle çeliştiler ve bu yol kapatılarak "X" işareti kondu.

Önermelerin Tutarlılığının Denetlenmesi

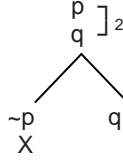
Herhangi bir önermenin tutarlılığı denetlenirken, çözümleme kurallarının aynısı uygulanır. *En az bir açık yol varsa önerme tutarlıdır.* Çünkü bu durum önermenin en az bir tane doğru değerine sahip olduğunu gösterir. Hiç açık yol yoksa önerme tutarsız demektir.

Örnek 1: $(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim:

$$1. (\sim p \vee q) \wedge (p \wedge q) \quad (\text{Ö})$$

$$3. (\sim p \vee q) \quad \neg^1$$

$$2. (p \wedge q) \quad \neg^1$$



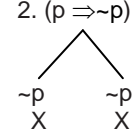
Önerme tutarlıdır.

Çözümlemeye önermenin sağ tarafına adım numarasını, sol tarafına başlangıç önermesi olduğunu belirten (Ö) harfini koyarak başladık. Tümel evetleme kuralına göre bileşenleri alt alta yazdık. Görüldüğü gibi, elde edilen iki önermeden biri tümel evetleme diğeri tikel evetleme önermesidir. İşlem sırasına göre ilk önce tümel evetleme yapılacağı için, kural gereği tümel evetleme önermesini (2) çözümledik. Çelişki ortaya çıkmadığı için tikel evetleme önermesini (3) çözümledik. Böylece işlem tamamlandı. Ortaya çıkan iki yoldan birisinde p ve $\sim p$ önermeleri çelişti. Bu nedenle o yolu (X) işaretiyle kapattık. Diğeri yol açık olduğu için çözümlendiğimiz önerme tutarlı çıktı.

Örnek 2:

$$1. p \wedge (p \Rightarrow \sim p) \quad (\text{Ö})$$

$$2. (p \Rightarrow \sim p) \quad \neg^1$$



Önerme tutarsızdır.

Birden Fazla Önermenin Tutarlılığının Denetlenmesi

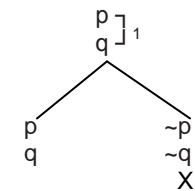
Birden fazla önerme denetlenirken, kaç tane önerme verilmişse alt alta yazılır ve çözümleme kuralları uygulanır.

Örnek: $p \Leftrightarrow q, p \wedge q$, önermelerinin tutarlılığını denetleyelim.

$$p \Leftrightarrow q, p \wedge q,$$

$$2. p \Leftrightarrow q \quad (\text{Ö})$$

$$1. p \wedge q \quad (\text{Ö})$$



önermeler tutarlıdır.

$$\text{SORU: } \sim(q \vee q) \wedge \sim p$$

SORU: $p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow \sim q$ önermelerinin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Bir önermenin geçerliliği denetlenirken, önermenin değili alınır ve değillenmiş hâli çözümlenir. Önermenin değillenmiş hâli çözümlendiğinde tüm yollar kapalıysa önerme geçerli demektir. En az bir açık yol varsa önerme geçersizdir.

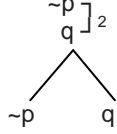
Örnek : $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

$$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \quad (\text{Ö})$$

$$1. \sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \quad (\sim\text{Ö})$$

$$2. (\sim p \wedge q)$$

$$3. \sim(p \wedge \sim q) \quad]^1$$



Önerme geçersizdir.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Çözümleyici çizelge ile çıkarımların geçerliliği de denetlenebilir. Bunun için, önce sonuç önermesinin değili alınır. Daha sonra öncüller ve sonuç ayrı önermeler gibi alt alta yazılır. Birden fazla önermenin çözümleme kuralında gördüğümüz biçimiyle önerme çözümlenir. Çözümleme sonunda tüm yollar kapalıysa çıkarım geçerli demektir. Tek bir açık yol varsa çıkarım geçersizdir. Çünkü açık yol varsa, bu öncüller ile sonucun değilinin aynı anda doğru değer aldığı gösterir. Dolayısıyla çıkarımın kendisinin (değillenmemiş hâlinin) öncülleri doğru, fakat sonucu yanlış değer almış demektir ki bu da çıkarımı geçersiz kılar.

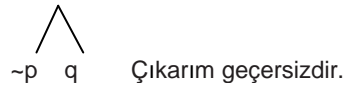
Örnek 1: $p \Rightarrow q, \sim p \therefore \sim q$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim.

$$p \Rightarrow q, \sim p \therefore \sim q$$

$$1. p \Rightarrow q \quad (\text{Ön})$$

$$\sim p \quad (\text{Ön})$$

$$q \quad (\sim\text{Sn})$$

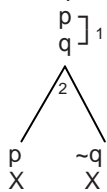


Örnek 2: $p \wedge q, \sim p \Rightarrow \sim q \therefore p$

$$1. p \wedge q \quad (\text{Ön})$$

$$2. \sim p \Rightarrow \sim q \quad (\text{Ön})$$

$$\sim p \quad (\sim\text{Sn})$$



Çıkarım geçerlidir.

SORU: $p \Rightarrow \sim q, \sim q \wedge r \therefore p \Rightarrow r$ çıkarımının ge-

çerli olup olmadığını denetleyiniz.

Önermelerin Denkliğinin (Eş değerliğinin) Denetlenmesi

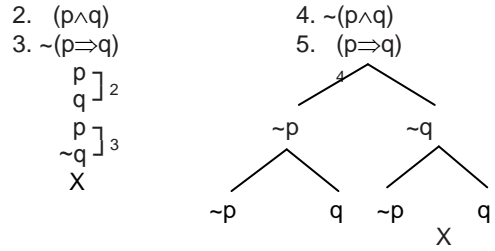
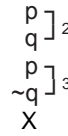
Çözümleyici çizelgede önermelerin denkliğini denetlemek için, önce verilen iki önerme birbirine karşılıklı koşul eklemiyle (\Leftrightarrow) bağlanır. Daha sonra önermenin değili alınır ve değillenmiş önerme çözümleme kurallarına göre çözümlenir. Tüm yollar kapalıysa önermeler denktir.

Örnek 1: $p \wedge q, p \Rightarrow q$ önermelerinin denkliğini denetleyelim.

$$1. \sim[(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)] \quad (\sim\text{Ö})$$

$$2. (p \wedge q)$$

$$3. \sim(p \Rightarrow q)$$



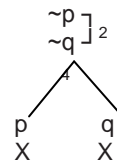
Önermeler denk değildir.

Örnek 2: $\sim(p \vee q), (\sim p \wedge \sim q)$ önermelerinin denk olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

$$1. \sim[\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \quad (\sim\text{Ö})$$

$$2. \sim(p \vee q)$$

$$4. \sim(\sim p \wedge \sim q)$$



$$5. (p \vee q)$$

$$3. (\sim p \wedge \sim q)$$



Bütün yollar kapalı olduğu için bu iki önerme denktir ve bu durum $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ biçiminde gösterilir.

SORU: $\sim(p \wedge q), \sim p \vee \sim q$ önermelerinin denk olup olmadığını önce doğruluk tablosuyla, sonra çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.