

2. Niceleme Mantığı (Yüklemler Mantığı)

Önermeler mantığı önermeleri nitelik yönünden ele aldığı için önermelerin niceliğini göstermede yetersizdir. Örneğin, "Bazı hayvanlar dört ayaklıdır." ve "Bütün hayvanlar canlıdır." önermelerini ele alalım. Önermeler mantığında bu önermeler birer basit önermedir ve p, q gibi sembollerle gösterilir. Ne var ki, bu önermelerden birincisi tikel, ikincisi tümel bir önermedir. Bir önermeyi p, q gibi sembollerle sembolleştirdiğimizde onun tümel mi ya da tikel mi olduğunu anlayamayız. Yani niceliği konusunda bize bilgi vermez. Bu nedenle niceleme mantığına gereksinim duyulmuştur. Niceleme mantığı, önermeler mantığının bu tür eksikliklerini ortadan kaldırır ve önermelerin ve çıkarımların daha ayrıntılı sembolleştirilmesini sağlar.

Önermeler mantığında kullandığımız bütün mantık değişmezleri ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) niceleme mantığında da kullanılır. Ayrıca, niceleme mantığının kendine özgü değişmezleri vardır.

Niceleme mantığında sembolleştirme şöyle yapılır:

- Önermelerin öznesi a, b, c gibi sembollerle gösterilir. Bunlara ad sembolleri denir.
- Önermelerin yüklemeleri F, G, H gibi sembollerle gösterilir.

Örneğin, "Filiz konuşkandır." önermesini alalım. "Filiz" öznesini "a" harfi ile, "konuşkandır" yüklemine F harfi ile sembolleştirelim. Bu durumda, "a, F'dir." gibi bir ifade ortaya çıkacaktır. Niceleme mantığında bu önerme, önce yüklem sembolü, daha sonra ad sembolü biçiminde yazıldığı için, yukarıdaki önermenin en son biçimi "Fa" olacaktır.

Ad sembolü	a, b, c	Gül, Namık, Zeynep
Yüklem sembolü	F, G, H	çalışmak, gitmek, yürümek, konuşmak

Aşağıdaki örnekler değişik sembolleştirmeleri göstermektedir.

Handan doktordur.	= Fa
Osman öğretmen değildir.	= $\neg$ Fa

Niceleme mantığında, önermenin yüklemi tek bir önermeye aitse birli yüklem, iki özneye aitse ikili yüklem, üç özneye aitse üçlü yüklem, n sayıda özneye aitse n'li yüklem adını alır. Bu durumda "Canan, Mehmet ve Fatih kardeşler." önermesini "Fabc" biçiminde sembolleştirmek gerekir.

Aşağıdaki örnekler birden fazla yüklemi olan sembolleştirmeleri göstermektedir.

Gökhan ve Güler evlidir	$\equiv$ Fab
Cengiz, Filiz ve Kardelen bencil değildir.	$\equiv$ $\neg$ Fabc

Niceleme mantığında bileşik önermeleri aynı kurallara uyarak sembolleştirebiliriz. Örneğin, "Öğretmen dersi güzel anlatırsa biz kolay öğreniriz."

önermesi bileşik bir önermedir ve aşağıdaki gibi sembolleştirilir.

Öğretmen dersi güzel anlatır	ise	biz	kolay öğreniriz.	$\equiv$	$Fa \Rightarrow Gb$
a		F		$\Rightarrow$	b
	G				

Dolayısıyla, önermeler mantığında $p \Rightarrow q$ biçiminde sembolleştirilen bir önerme, niceleme mantığında $Fa \Rightarrow Gb$ biçiminde sembolleştirilir.

Önermeler	Önermeler Mantığı	Niceleme Mantığı
Kemal çalışkandır.	p	Fa
Ayşe çirkin değildir.	$\neg$ p	$\neg$ Fa
O gelirse ben giderim.	$p \Rightarrow q$	$Fa \Rightarrow Gb$
Ahmet çalışkan ve zekidir.	$p \wedge q$	$Fa \wedge Ga$

Aynı kurallar çıkarıma da uygulanabilir.

"Su sıcaksa denize gireceğim.	$Fa \Rightarrow Gb$
Su sıcaktır.	Fa
O hâlde, denize gireceğim."	Gb

SORU: "Barış uzun boylu ise öğretmen onu seçecek." önermesini niceleme mantığıyla sembolleştiriniz.

a) Niceleyiciler ve Açık Önermeler

Her önermenin öznesi "Ahmet, Ali, Ayşe" gibi her zaman açıkça belirli olmaz. Bir önerme, belirsiz bir kişiyi ya da nesneyi özne olarak alabilir. Bu tür önermelerde belirsiz olan özneyi göstermek için x, y, z gibi semboller kullanılır. Bu sembollere değişken adı verilir.

İçinde x, y, z gibi değişkenler geçen önermelere açık önerme denir.

Örneğin, "x öğretmendir.", "y + 4 = 9" gibi önermeler birer açık önermedir.

Açık önermeyi önerme haline getirmek için, içinde bulunan x, y, z gibi değişkenlerin yerine belirli bir terim konur. Böylece önerme bir doğruluk değerine sahip olur. Örneğin; "x öğretmendir." önermesinin bir doğruluk değeri yoktur.

Ancak x yerine "Ali" terimini koyduğumuzda "Ali öğretmendir." önermesi bir doğruluk değerine sahip olacaktır.

Bir açık önermeyi, önerme hâline getirmek için kullandığımız tüm terimler kümesine evren denir ve E: { } biçiminde gösterilir. Verilen evrendeki değerleri değişkenin yerine koyma işlemine özelleme, bu şekilde elde edilen önermelere de özelleme önermesi adı verilir.

Evrenden seçtiğimiz değerlerin bir kısmı önermeyi doğru kılarken, bir kısmı yanlış kılabılır. Evrene ait bir değerın özelleme önermesini doğru kılmasına gerçekleme adı verilir.

Örnek 1:

Açık önerme: "x tek sayıdır."	E: {1, 2, 3, 4, 5}
1 tek sayıdır.	Özelleme (D)- Gerçekleme
2 tek sayıdır.	Özelleme (Y)
3 tek sayıdır.	Özelleme (D)- Gerçekleme
4 tek sayıdır.	Özelleme (Y)
5 tek sayıdır.	Özelleme (D)-Gerçekleme

Örnek 2:

Açık önerme: "x filozoftur."	E: {Socrates, Cevat, Abbas, Banu}
Sokrates filozoftur.	Özelleme (D)- Gerçekleme
Cevat filozoftur.	Özelleme (Y)
Abbas filozoftur.	Özelleme (Y)
Banu filozoftur.	Özelleme (Y)

Önermelerin niceliğini gösteren "bütün", "bazı", "tüm", "kimi" gibi terimlere niceleyici adı verilir. Niceleme mantığında tümel ve tikel niceleyici olmak üzere iki tür niceleyici vardır.

Tümel niceleyici "v" sembolüyle gösterilir ve tüm, bütün, her, hiçbir, hepsi vb. anlamlara gelir.

Tikel niceleyici "3" sembolüyle gösterilir ve bazı, kimi, bir kısım vb. anlamlara gelir.

Örneğin, "x fotosentez yapar." açık önermesini ele alalım. E: {bitkiler} olarak alınırsa, evrendeki değerlerin tümü "x fotosentez yapar." önermesini gerçekler (doğrular). Bu durum, klâsik mantıkta "Tüm bitkiler fotosentez yapar." biçiminde, niceleme mantığında "Tüm x'ler için x fotosentez yapar." biçiminde ifade edilir. "Türn x'ler" yerine "vx", "x fotosentez yapar." yerine de "Fx" sembollerini koyduğumuzda, "vxFx" tümel önermesini elde ederiz.

Şimdi, yukarıdaki önerme için verdiğimiz evreni değıştirelim. Bu kez evren, E: {canlılar} olsun. Bu durumda, evrende verilen değerlerin bir kısmı "x fotosentez yapar." açık önermesini gerçeklerken (doğrular), bazı değerler bu önermeyi gerçeklemez (yanlışlar). Bu durumu klasik mantıkta "Bazı canlılar fotosentez yapar." biçiminde ifade ederken, niceleme mantığında "Bazı x'ler için, x fotosentez yapar." biçiminde ifade ederiz. "Bazı x'ler" yerine "3x", "x fotosentez yapar." yerine de "Fx" koyarsak, "3xFx" tikel önermesini elde ederiz.

Aynı kuralları çıkarıma uygulayarak çıkarımları da sembolleştirebiliriz.

"Her insan değerlidir.

Duygu insandır.

O hâlde, Duygu değerlidir."

Bu çıkarımda, "değerlidir", "insandır" ve "Duygu" olmak üzere üç tane değışmez vardır.

"insandır" : F (yüklem değışmezi)

"değerlidir" : G (yüklem değışmezi)

"Duygu" : a (ad değışmezi) biçiminde sembolleştirilirse çıkarım;
vx (Fx⇒Gx), Fa .: Ga biçiminde sembolleştirilir.

Niceleme mantığında, tümel niceleyici ile kurulmuş açık önermelerin özellemeleri yapılırken elde edilen önermeler birbirlerine tümel evetleme eklemi (v) ile bağlanırlar.

Örnek 1: vx (x hayvandır.) E: {kedi, aslan, yılan} olsun. Evrende verilmiş olan değerleri açık önermede yerine koyarak özellemeyi yapalım.

"Kedi hayvandır." (D)

"Aslan hayvandır." (D)

"Yılan hayvandır." (D)

Elde edilen önermeleri birbirine tümel evetleme eklemiyle bağlayıp, doğruluk değerlerini yerine koyduğumuzda,

Ha v Hb v Hc şeklinde sembolleştirilir ve doğrulukları ile ilgili olarak da

D v D v D = D değerini elde ederiz.

Örnek 2: vx (x hayvandır.) E: {taş, demir, kuş} olsun. Evrendeki değerleri değışkenlerde yerine koyarak özellemeyi yapalım.

"Taş hayvandır." (Y)

"Demir hayvandır." (Y)

"Kuş hayvandır." (D)

Bu durumda, elde ettiğimiz önermenin doğruluk değeri;

Y v Y v D = Y olur.

Niceleme mantığında tikel niceleyici ile kurulmuş açık önermelerin özellemeleri yapılırken, elde edilen önermeler tikel evetleme eklemiyle (v) bağlanırlar.

Örnek 1: 3x (x madendir.) E: {altın, gümüş, krom} olsun.

Evrendeki değerleri değışkenin yerine koyalım.

"Altın madendir." (D)

"Gümüş madendir." (D)

"Krom madendir." (D)

Önermeleri tikel evetleme eklemiyle birbirine bağlarsak, elde ettiğimiz önermenin doğruluk değeri;

D v D v D = D olur.

Örnek 2: 3x (x madendir.) E: {defter, insan, kalem} olsun.

Evrendeki değerleri değışkenin yerine koyarsak;

"Defter madendir." (Y)

"İnsan madendir." (Y)

"Kalem madendir." (Y)

önergelerini buluruz. Bu önergeleri tikel evetleme eklemiyle birleştirirsek önermenin doğruluk değeri;

$$Y \vee Y \vee Y = D \text{ olur.}$$

Gerçekleme işlemini karmaşık önergeler üzerinde de yapabiliriz.

Örnek: $\forall x (x \text{ sıvıdır.}) \Rightarrow \exists x (x \text{ gazdır})$ E: {helyum, su} olsun.

Evrende verilmiş olan değerleri değişkenlerin yerine koyalım.

$$[(\text{helyum sıvıdır.}) \wedge (\text{su sıvıdır.})] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cc} Y & D \\ [(\text{helyum gazdır.}) \vee (\text{su gazdır.})] & \\ D & Y \end{array}$$

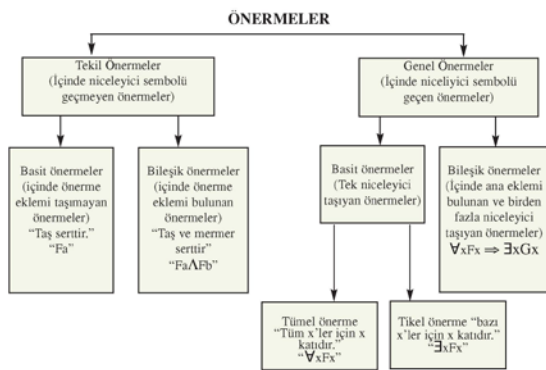
$$(Y \wedge D) \Rightarrow (D \vee Y)$$

$$Y \Rightarrow D = D \text{ değerini alır.}$$

SORU: $\forall x (x \text{ katıdır.})$ açık önermesini E: {silgi, kalem, oksijen} evreninde;

SORU: $\exists x (x \text{ çift sayıdır.})$ açık önermesini E: {1, 3, 5, 7} evreninde gerçekleyip doğruluk değeri bulunuz.

Bu bilgilerin ışığında, niceleme mantığındaki önergeleri aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz.



b) Yorumlama, Tutarlılık, Geçerlilik, Denklik

Sembolleştirilmiş bir önermeyi yorumlama, önermeye bir anlam vermek demektir. Yorumlama yapabilmek için de bir evrenin verilmesi gerekir. Evrendeki değerler sembolik önermeye uygulanarak yorumlama yapılır.

Örnek 1: Fa önermesinde F: akıllıdır, a: Ali olsun

Bu durumda, "Ali akıllıdır." yorumunu elde ederiz.

Örnek 2: $\forall x Fx$ açık önermesinde E: {Ali, Veli} evreni verilsin.

Bu durumda önermenin yorumu,
(Ali akıllıdır) $\wedge$ (Veli akıllıdır) biçiminde olur.

Örnek 3: $\forall x Fx \Rightarrow \exists x Fx$ açık önermesinde E: {Ali, Veli} olsun. Bu durumda önermenin yorumu,
[(Ali akıllıdır.) $\wedge$ (Veli akıllıdır.)] $\Rightarrow$ [(Ali akıllıdır.) $\vee$ (Veli akıllıdır.)] biçiminde olur.

Niceleme mantığında önergelerin tutarlılık, geçerlilik ve denklik denetlemesi yapılabilir. Bunu yaparken çözümleyici çizelgenin özellikleri kullanılır.

Ayrıca, niceleme mantığının niceleyici değilleme kuralları ve özelleme kuralları olmak üzere kendine özgü kuralları da vardır.

Niceleyici Değilleme Kuralları

Oldukça basit bir biçimde, tümel ve tikel önergeleri birbirine dönüştürmeyi sağlayan kurallardır. Tümel ve tikel niceleyici değilleme kuralı olmak üzere ikiye ayrılır.

Tümel Niceleyici Değilleme Kuralı

$\sim \forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$ biçiminde ifade edilir. Değilleniş tümel önerme yerine ona denk olan tikel önerme yazılır.

Örneğin, $\sim \forall x (Fx \Rightarrow Gx)$ önermesini bu kurala göre çözümlersek,

$$1. \sim \forall x (Fx \Rightarrow Gx)$$

$$\exists x \sim (Fx \Rightarrow Gx) \text{ (1) sonucunu buluruz.}$$

Tikel Niceleyici Değilleme Kuralı

$\sim \exists x Fx \equiv \forall x \sim Fx$ biçiminde ifade edilir. Değilleniş tikel önerme yerine, özdeşi olan tümel önerme yazılır.

Örneğin, $\sim \exists x (Fx \vee Gx)$ önermesini bu kurala göre çözümlerim.

$$1. \sim \exists x (Fx \vee Gx)$$

$$\forall x \sim (Fx \vee Gx) \text{ (1) sonucunu buluruz.}$$

Özelleme Kuralları

Özelleme kuralları da tümel özelleme ve tikel özelleme olarak ikiye ayrılır.

Tümel Özelleme Kuralı

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken $\forall x Fx$ gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa x bilinmeyenini yerine o ad sembolü yazılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir sembol kullanılır. Çözüm yapılan yol üzerinde birden fazla ad sembolü geçiyorsa, bu ad sembollerinin

her biri ile tümel önermenin ayrı ayrı özellemesi yapılır. Tümel özelleme yapılırken tümel niceleyici ($\forall$) kalkar, sadece yüklem sembolü kalır.

Örnek: $\forall xFx, Fb \therefore Gb$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim: Önce öncüller ile sonucun değili alt alta yazılır (daha önce anlattığımız çıkarımların geçerliliği konusuna bakınız).

1. $\forall xFx$, (Öncül)
 Fb (Öncül)
 $\neg Gb$ (Sonuç)
 Fb (1) yol açık olduğundan çıkarım geçersizdir.

Tikel Özelleme Kuralı

Çözümleyici çizelgede işlem yapılırken $\exists xFx$ gibi bir tümel önermenin özellemesini yapmak için, aynı yol üzerinde daha önce geçmiş bir ad sembolü (a, b, c gibi) varsa o ad sembolünden farklı bir sembol kullanılır. Eğer daha önce geçmiş bir ad sembolü yoksa, herhangi bir ad sembolü kullanılır. Tikel özelleme yapılırken tikel niceleyici ($\exists$) kalkar, sadece yüklem sembolleri kalır.

Örnek: $\exists xFx, Gb \therefore Ga$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1. $\exists xFx$ (Ön)
 Gb (Ön)
 $\neg Ga$ (Sn)
 Fc (1) Çıkarım geçersizdir.

Niceleme mantığında denetleme yapılırken aşağıda gösterilen öncelik sırasına göre işlem yapılır.

1. Tümel niceleyici değilleme kuralı
2. Tikel niceleyici değilleme kuralı
3. Alt alta yazma kuralları
4. Tikel özelleme kuralı
5. Çatal açma kuralları
6. Tümel özelleme kuralı

c) Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Önermelerin Tutarlılığının Denetlenmesi

Daha önce gördüğümüz gibi, bir önermenin tutarlı olması işlem sonunda en az bir tane açık yol olması demektir. Tüm yollar kapalı ise önerme tutarsızdır.

Örnek 1: $\exists xFx \wedge \exists xGx$ önermesinin tutarlılığını denetleyelim:

1. $\exists xFx \wedge \exists xGx$ (Ö)
2. $\exists xFx$]
3. $\exists xGx$]¹
 Fa (2)
 Gb (3) Önerme tutarlıdır.

Yukarıdaki örnekte, önce alt alta yazma kuralı uygulandı. Son olarak 2 ve 3 no'lu önermeler tikel önerme olduğu için tikel özelleme kuralı uygulandı. Ortaya çıkan tek yol açık olduğundan, önerme tutarlıdır.

Örnek 2: $\exists x (Fx \wedge \neg Fx)$ önermesinin tutarlılığını

denetleyelim:

1. $\exists x (Fx \wedge \neg Fx)$ (Ö)
2. $(Fa \wedge \neg Fa)$ (1)
 Fa
 $\neg Fa$]²
 X Önerme tutarsızdır.

Örnek 3: $\forall xFx \vee \forall xGx$

1. $\forall xFx \vee \forall xGx$ (Ö)
(1)
2. $\forall xFx$ 3. $\forall xGx$
 Fa (2) Ga (3) Önerme tutarlıdır.

Önermelerin Birlikte Tutarlılığının Denetlenmesi

Birden fazla önerme verilmişse, önermelerin tutarlılığını denetlemek için önce bu önermeler alt alta yazılır ve çözümleme kuralları ile niceleme kurallarına uygun olarak çözülür. Açık yol varsa önermeler tutarlıdır.

Örnek 1: $\neg \forall xFx, \neg \exists xFx$ önermelerinin bir arada tutarlı olup olmadığını denetleyelim:

$\neg \forall xFx, \neg \exists xFx$
1. $\neg \forall xFx$, (Ö)
2. $\neg \exists xFx$ (Ö)
3. $\exists x \neg Fx$ (1)
4. $\forall x \neg Fx$ (2)
 $\neg Fa$ (3)
 $\neg Fa$ (4) Önermeler Tutarlıdır.

Örnek 2: $\forall xHx, \neg Ha$ önermelerinin birlikte tutarlılığını denetleyelim:

$\forall xHx, \neg Ha$
1. $\forall xHx$ - (Ö)
 $\neg Ha$ (Ö)
 Ha (1)
 X Önermeler tutarsızdır.

Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

Bir önermenin geçerliliği denetlenirken önce o önermenin değili alınır. Çözümleme sonucunda tüm yollar kapalıysa önerme geçerlidir. Açık bir yol varsa önerme geçersizdir. "Değillenmiş bir önerme tutarlı ise önermenin kendisi geçersizdir, değillenmiş önerme tutarsız ise önermenin kendisi geçerlidir." Örneğin, $\neg (\forall xFx \Rightarrow \exists xFx)$ önermesi tutarlı ise, o zaman geçersiz demektir.

Örnek 1: $\forall xFx \Rightarrow \exists xFx$ önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

1. $\neg (\forall xFx \Rightarrow \exists xFx)$ (Ö)
2. $\forall xFx$]
3. $\neg \exists xFx$]¹
4. $\forall x \neg Fx$ (2)
 Fa (3)
 $\neg Fa$ (4)
 X Önerme geçerlidir.

Örnek 2: $\exists xFx \wedge \exists xGx$ önermesinin geçerliliğini denetleyelim:

1. $\neg (\exists xFx \wedge \exists xGx)$ ($\sim\ddot{O}$)
 2. $\neg\exists xFx$
 3. $\forall x\neg Fx$ (2)
 4. $\neg\exists xGx$
 5. $\forall x\neg Gx$ (4)
 6. $\neg Fa$ (3)
 7. $\neg Ga$ (5)
- Önerme geçersizdir.

SORU: $\forall xFx \vee \forall xGx$ önermesinin geçerli olup olmadığını denetleyiniz.

Çıkarımların Geçerliliğinin Denetlenmesi

Niceleme mantığında çıkarımların da geçerliliği denetlenebilir. Çıkarımın geçerliliğini denetlemek için, daha önce önermeler mantığında yaptığımız gibi, çıkarımda verilen öncülleri aynen alıp, sadece sonucun değilini alacağız. Çözümleme sonunda tüm yollar kapalı ise çıkarım geçerli, en az bir açık yol varsa çıkarım geçersizdir.

Örnek 1: $\forall xFx, Ga \therefore Fa$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1. $\forall xFx$ (Ön)
 2. Ga (Ön)
 3. $\neg Fa$ ($\sim Sn$)
 4. Fa (1)
 5. X
- Çıkarım geçerlidir.

Örnek 2: $\exists xFx \therefore \exists x(Fx \wedge Gx)$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

1. $\exists xFx$ (Ön)
 2. $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ ($\sim Sn$)
 3. $\forall x\neg(Fx \wedge Gx)$ (1)
 4. Fa (2)
 5. $\neg(Fa \wedge Ga)$ (3)
 6. $\neg Fa$
 7. $\neg Ga$
 8. X
- Çıkarım geçersizdir.

Önermelerin Denkliğinin (Eş Değerliğinin) Denetlenmesi

Verilen iki önermenin denkliğini denetlemek için, önermeler karşılıklı koşul eklemiyle ($\Leftrightarrow$) birbirine bağlanır. Daha sonra elde edilen önermenin değillenmesi alınır. Değillenmiş önermenin çözümlemesi sonucunda, bütün yollar kapalıysa başlangıçta verilen önermeler denktir. Açık tek bir yol varsa, önermeler denk değildir.

Örnek 1: $\neg\forall xFx, \exists x\neg Fx$ önermelerinin denkliğini denetleyelim:

1. $\neg[\neg\forall xFx \Leftrightarrow (\exists x\neg Fx)]$
 2. $\neg\forall xFx$
 3. $\neg\exists x\neg Fx$
 4. $\exists x\neg Fx$ (2)
 5. $\forall xFx$ (3)
 6. $\neg Fa$ (4)
 7. Fa (5)
 8. X
 9. $\forall x Fx$
 10. $\exists x\neg Fx$
 11. $\neg Fa$ (6)
 12. Fa (7)
 13. X
- Önermeler denktir.

Örnek 2: $\exists xFx, \forall xFx$ önermelerinin denkliğini denetleyelim:

1. $\neg(\exists xFx \Leftrightarrow \forall xFx)$
 2. $\exists xFx$
 3. $\neg\forall xFx$
 4. $\exists x\neg Fx$ (2)
 5. Fa (3)
 6. $\neg Fb$ (4)
 7. X
 8. $\neg\exists xFx$
 9. $\forall xFx$
 10. $\forall x\neg Fx$ (5)
 11. Fa (6)
 12. $\neg Fa$ (7)
 13. X
- Bir tane açık yol bulunduğu için önermeler denk değildir.

SORU: $\neg\exists x\neg Fx, \forall xFx$ önermelerinin denk olup olmadığını denetleyiniz.