

## B. ÇOK DEĞERLİ MANTIK

İki değerli mantıkta önermeler, doğru ve yanlış olmak üzere iki değer alabilir. Çünkü özdeşlik, çelişmezlik ve üçüncü hâlin olanaksızlığı ilkelerine göre, önermeler başka bir değer alamaz. Bu üç ilkeye göre önermeler ya doğrudur ya da yanlış. Ancak bu durum bir takım önermelerin değerini belirlememizi engeller. Örneğin, "Bu yaz tatile gideceğim." biçimindeki bir önermeye, geleceğe ilişkin bir bilgi verdiği için doğru ya da yanlış diyemeyiz. Bu türden önermelerin doğru ya da yanlış olması olasıdır, ancak kesin değildir. Bu gelişmeler çok değerli mantığın gelişmesine neden olmuştur.

Önermelerin ikiden fazla değere sahip olabileceklerini kabul eden mantık sistemine çok değerli mantık denir.

Çok değerli mantık içinde, özellikle üç değerli mantık günümüzde önem kazanmıştır. Üç değerli mantık yanında dört değerli mantık ve hatta sonsuz değerli olasılık mantığı kurulmuştur. Biz sadece üç değerli mantığa ilişkin bazı özellikleri göreceğiz.

İki değerli mantıkta önermelerin doğru ve yanlış olmak üzere iki değeri bulunurken, üç değerli mantıkta bu değerlere bir de "belirsiz" değeri eklenmektedir. Bu durumda, örneğin bir "p" önermesi doğru, yanlış ve belirsiz değerler almaktadır. Üç değerli mantığın doğruluk değerleri aşağıdaki gibidir:

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| Doğru    | D | 1   |
| Yanlış   | Y | 0   |
| Belirsiz | B | 1/2 |

Üç değerli mantık, iki değerli mantıkta kullanılan "değil" ( $\neg$ ), "ve" ( $\wedge$ ), "veya" ( $\vee$ ), "ise" ( $\Rightarrow$ ), "ancak ve ancak" ( $\Leftrightarrow$ ) gibi mantıksal değişmezleri aynı biçimde kullanır. Ancak doğruluk tablosu farklıdır. İki değerli mantıkta sadece iki değer olduğundan tek bir önermenin doğruluk tablosu iki, iki önermenin doğruluk tablosu dört satırdan oluşuyordu. Üç değerli mantıkta ise tek bir önermenin doğruluk tablosunda üç, iki önermenin dokuz satırı bulunur.

| P | $\neg p$ |
|---|----------|
| D | Y        |
| B | B        |
| Y | D        |

"p" önermesi doğruyken, " $\neg p$ " önermesi yanlış, "p" önermesi belirsizken " $\neg p$ " önermesi de belirsiz, "p" önermesi yanlışken " $\neg p$ " önermesi doğru değer alır.

Üç değerli mantıkta önerme eklemleri ile oluşturulan bileşik önermelerin alabileceği doğruluk değerleri aşağıdaki gibidir:

| P | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| D | D | D            | D          | D                 | D                     |
| D | B | B            | D          | B                 | B                     |
| D | Y | Y            | D          | Y                 | Y                     |
| B | D | B            | D          | D                 | B                     |
| B | B | B            | B          | D                 | D                     |
| B | Y | Y            | B          | B                 | B                     |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | D | Y | D | D | Y |
| Y | B | Y | B | D | B |
| Y | Y | Y | Y | D | D |

### C. KIPLİK MANTIĞI

Daha öncede açıkladığımız gibi kiplik, önermenin dile getirdiği durumun gerçek, zorunlu ve mümkün olup olmaması halidir. Önergeler kiplerine göre gerçek, zorunlu ve mümkün olarak üçe ayrılır. Kiplik mantığı zorunlu ve mümkün önermeleri kapsayan mantıktır.

Kiplik mantığında, zorunlu eklemi ile kurulan önermelere zorunlu önerme, mümkün eklemi ile kurulan önermelere de mümkün (olanaklı) önerme denir.

Zorunlu eklemi " $\Box$ " sembolüyle, mümkün önerme " $\Diamond$ " sembolüyle gösterilir. Bu sembollere kiplik değişmezleri adı verilir. Kiplik değişmezleri, verilen bir önermeden yeni bir önerme oluşturmaya yarar.

| Kiplik Değişmezleri |            |
|---------------------|------------|
| Zorunlu             | $\Box$     |
| Mümkün              | $\Diamond$ |

Pamuğun yumuşak olması zorunludur = p zorunludur =  $\Box p$

Pamuğun yumuşak olması mümkündür = p mümkündür =  $\Diamond p$

Kiplik mantığı, kiplik değişmezleri yanı sıra, önermeler mantığındaki mantıksal değişmezleri de ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ) kullanır.

Zorunluluk kipiyle kurulan bir önermenin doğruluğu, gerçek dünyada olduğu gibi tüm olası dünyalarda da zorunludur. Yani, zorunluluk kipiyle kurulmuş bir önermeyi her zaman böyle bir zorunluluk varmış gibi düşüneceğiz.

Mümkünlük kipiyle kurulmuş bir önermenin doğruluğu ise, en az bir dünya için (gerçek dünyada ya da var olabilecek başka bir dünyada) doğrudur. Dolayısıyla, kiplik mantığında önermelerin alabileceği doğruluk değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

| Önerme                                           | p | $\Box p$ | $\Diamond p$ |
|--------------------------------------------------|---|----------|--------------|
| 1. Pamuk yumuşaktır.                             | D | Y        | D            |
| 2. Pamuk yumuşaktır veya pamuk yumuşak değildir. | D | D        | D            |
| 3. Pamuk yumuşak değildir.                       | Y | Y        | D            |
| 4. Pamuk yumuşaktır ve pamuk yumuşak değildir.   | Y | Y        | Y            |

"Pamuk yumuşaktır." önermesi gerçek dünya açısından doğrudur. Çünkü gerçek dünyada pamuğun yumuşak olduğunu biliyoruz. En az bir dünyada doğru olduğu için bu önerme mümkünlük kipiyle (0) yazıldığında doğru (D) değer alır. Ancak, pamuğun yumuşak olmadığı başka olası dünyalar olduğunu farz edersek, bu önerme zorunluluk kipinde ( $\Box$ ) yanlış (Y) değer alır. Çünkü eğer başka bir dünyada pamuk yumuşak değilse, bizim zorunlu olarak bahsettiğimiz önerme yanlış demektir.

$\Box p$  önermesinin doğru olması, yalnız gerçek dünyada değil, diğer tüm olanaklı dünyalarda da doğru

olmasına bağlıdır.

◊p önermesinin doğru olması, gerçek dünyada ya da diğer tüm olanaklı dünyaların sadece birinde doğru olmasına bağlıdır.

Zorunlu önermelerin doğruluğu tüm dünyalarda ve gerçek dünyadaki doğruluğuna bağlı olduğundan mantıksal doğruluğu gösterir. Mümkün önermelerin doğruluğu, herhangi bir dünyadaki doğruluğa bağlı olduğundan olgusal (gözlenebilen) doğruluğu gösterir.

#### D. ÖZDEŞLİK MANTIĞI

Özdeşlik mantığı niceleme mantığına benzetmekle birlikte, onu da içine alan daha kapsamlı bir mantıktır. Bu nedenle, niceleme mantığında geçen tüm mantıksal değişmezler ( $\vee$ ,  $\exists$ ) ve önermeler mantığında geçen mantıksal değişmezler ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ) özdeşlik mantığında da geçerlidir. Ayrıca özdeşlik mantığının kendine özgü değişmezleri vardır.

Daha önce gördüğümüz gibi, özdeşlik ilkesi bir şeyin kendisiyle özdeş olduğunu ifade etmekteydi. Özdeşlik mantığında "özdeş", bir mantık değişmezidir ve " $\equiv$ " sembolüyle gösterilir. Özdeşlik değişmezi, özdeşlik önermesinin öznesi ve yüklemine birbirine eşit ya da özdeş olduğunu gösterir. Örneğin,  $a \equiv b$  önermesi özdeşlik önermesidir. Bu önermede a ile b arasındaki ilişki ikili bir yüklemidir. Yani iki ad sembolü (a, b) ve bir yüklem sembolü (eşittir) vardır.

Örneğin, "Everest dağı dünyanın en yüksek dağıdır." önermesini ele alalım.

"Everest dağı" a sembolü ile, "Dünyanın en yüksek dağı" b sembolüyle gösterilebilir. "dır" eki de " $\equiv$ " sembolüyle gösterilebilir. Böylece yukarıdaki önerme  $a \equiv b$  biçiminde sembolleştirilir.

#### E. VARLIK MANTIĞI

Varlık mantığı, özdeşlik mantığının mantık değişmezlerine "var" sözcüğünün eklenmesiyle elde edilmiş bir mantık sistemidir. Niceleme ve özdeşlik mantığı sadece gerçek dünyaya ait varlıklar üzerinde önermeler oluştururken, varlık mantığı hem gerçek dünyada hem de gerçek olmayan dünyalardaki varlıklar üzerine önermeler oluşturur. Yani, insan zihninde hayal ürünü olarak bulunan varlıklar için de önermeler oluşturur. Örneğin, "Everest tepesi vardır." dediğimizde, "Everest tepesi" gerçek dünyada var olan bir ad iken, "Aşk tanrısı Eros vardır.", "Kaf dağı vardır." vb. dediğimizde gerçek dünyada var olmayan adlardan bahsediyoruz demektir. Varlık mantığı, bunun gibi gerçek dünyada var olmayan varlıkları da ad olarak ele alır.

"Vardır." biçiminde ifade edilen mantık değişmezi " $E!$ " sembolüyle gösterilir. Örneğin, "Anka kuşu vardır." önermesi " $E!a$ " biçiminde sembolleştirilir. Burada "Anka kuşu" a harfiyle, "vardır"  $E!$  ile sembolleştirilmiştir.

Gerçek dünyada var olmayan varlıklarla yapılmış önermelerin niceleme mantığında kurulması olanaklı değildir. Çünkü niceleme mantığında bu tür önermeler yanlış değer alır. Niceleme mantığında "Kaf Dağı vardır." önermesi yanlış, ancak "Alp dağları vardır." önermesi doğru değer alır.

## ARAŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

- Bir yargı bildiren ve bir doğruluk değeri olan cümlelere ..... denir.
- İçinde önerme eklemi geçen önermelere ..... denir.
- Olumlu bir ifadeyi olumsuz, olumsuz bir ifadeyi olumlu yapan önerme eklemine ..... eklemi denir.
- "İse" sözcüğüyle ifade edilen eklem ..... denir.
- Yorumlarından en az birisinin doğru olduğu önermeye ..... denir.
- Bütün değerleri doğru olan önermeye ..... denir.
- Sembolleştirilmiş önermelere doğru ya da yanlış değer verilmesine ..... denir.
- İki önermenin ..... olması demek, aldıkları değerlerin birbirinin aynı olması demektir.

2. Aşağıdaki önermelerin ana eklem ve ana bileşenini bularak, önermeleri ana eklemine göre tanımlayınız.

- $p \Rightarrow \sim q$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)]$
- $[(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow \sim q)] \vee (\sim p \Leftrightarrow q)$

3. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin basit, hangilerinin bileşik olduğunu gösteriniz.

- Güneş her zaman ısıtır.
- İnsanlar arasında eşitlik olursa herkes mutlu olur.
- Ancak ve ancak sıcaklık sıfırın altına inerse su donar.
- İnsan okur.
- Düşünüyorum o hâlde varım.

4. Aşağıdaki önermelerde p yerine D, q yerine Y yazarak doğruluk değerlerini bulunuz.

- $p \Rightarrow \sim q$
- $(p \vee q) \wedge \sim q$
- $\sim p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)]$
- $[(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow \sim q)] \vee (\sim p \Leftrightarrow q)$
- $[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

5. Aşağıdaki önermelerin tutarlılığını doğruluk tablosuyla denetleyiniz.

- a.  $p \Rightarrow q$
- b.  $(\neg p \vee \neg q) \wedge p$
- c.  $p \Leftrightarrow [(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \Rightarrow q)]$
- d.  $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)$
- e.  $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg q$

6. Aşağıdaki önermelerin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

- a.  $\neg(p \Rightarrow \neg q)$
- b.  $(p \vee q) \wedge r$
- c.  $p \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)]$
- d.  $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$
- e.  $\forall x (Fx \Rightarrow \neg Fx)$
- f.  $\exists x Fx \Leftrightarrow \exists x \neg Fx$
- g.  $\forall x (Fx \Rightarrow Gx), \exists x (Fx \wedge \neg Gx)$

## DEĞERLENDİRME SORULARI

- Aşağıdaki önermelerden hangisi basit önermedir?  
A) Ay her zaman beyazdır.      B) Ya gelirsın ya gidersin.  
C) Ne geldi ne de gitti.      D) Gelirse gitmez.
- $\sim[(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)]$  A r önermesinin ana eklemi aşağıdakilerden hangisidir?  
A) Tikel evetleme eklemi.      B) Koşul eklemi.  
C) Karşılıklı koşul eklemi.      D) Tümel evetleme eklemi.
- p önermesi doğru, q önermesi yanlış ise, aşağıdakilerden hangisi "doğru" değer alır?  
A)  $p \Rightarrow q$       B)  $p \Leftrightarrow q$       C)  $p \vee q$       D)  $p \wedge q$
- İki önerme bir arada kaç değer alabilir?  
A) Bir      B) İki      C) Dört      D) Sekiz
- "Ali hem çalışıyor hem okuyor." önermesinin önermeler mantığında sembolik ifadesi hangisidir?  
A)  $p \Rightarrow q$       B)  $p \wedge q$       C)  $p \Leftrightarrow q$       D)  $p \vee q$
- Aşağıdaki önermelerin hangisinde mantıksal bir hata yapılmıştır?  
A) Kan kırmızı değil yeşildir.  
B) Hiçbir sarışın, sarışın değildir.  
C) Bazı politikacılar yalancıdır.  
D) Bütün sınavlar zordur.
- "Her insanın iyi olduğu doğru değildir." ( $\sim \forall x Fx$ ) önermesinin eşdeğeri aşağıdakilerden hangisidir?  
A) Her insan iyidir ( $\forall x Fx$ )  
B) Hiçbir insan iyi değildir ( $\forall x \sim Fx$ )  
C) Bazı insanlar iyi değildir. ( $\exists x \sim Fx$ )  
D) Her insanın iyi olmadığı doğru değildir. ( $\sim \forall x \sim Fx$ )
- Aşağıdaki kavramlardan hangisi kiplik gösterir?  
A) Değil      B) Var      C) Özdeş      D) Zorunlu
- Aşağıdakilerden hangisi p ile q önermelerinin denk olduğunu gösterir?  
A)  $p \Rightarrow q$  önermesinin tutarlı olması  
B)  $p \wedge q$  önermesinin geçerli olması  
C)  $p \Leftrightarrow q$  önermesinin geçerli olması  
D)  $p \vee q$  önermesinin tutarlı olması